Chapitre 1

LOGIQUE ET RAISONNEMENTS

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- Maîtriser les notations de logique et le vocabulaire.
- Se familiariser avec les techniques de démonstrations.
- Admettre la rigueur comme son nouvel idéal de vie.

Table des matières

I ÉLÉMENTS DE LOGIQUE

D'un point de vue logique, la langue française est souvent ambiguë. Prenons l'exemple de la conjonction « ou » :

- À la question « tu aimes la viande ou le poisson ? », on répondra oui si on aime l'un, ou l'autre, ou les deux. Dans ce cas, c'est un *ou inclusif*. Pour lever l'ambiguité, on peut remplacer « ou » par « et/ou ».
- Si on dit « il a 18 ou 19 ans », il peut avoir 18 ans, 19 ans, mais pas les deux : c'est un *ou exclusif*. Pour lever l'ambiguité, on peut dire « il a ou (bien) 18 ans, ou (bien) 19 ans ».

En mathématiques, il est primordial d'écrire définitions, théorèmes et démonstrations sans la moindre ambiguité. Il faut donc se donner un langage précis, sans équivoque possible.

La logique permet cela, et va plus loin : elle donne un cadre pour appliquer et expliquer des raisonnements, et permet d'atteindre un haut niveau de rigueur.

1 Assertions

Définition 1

Une **assertion** ou **proposition** est un énoncé auquel on peut attribuer une et une seule valeur logique : soit vrai (V), soit faux (F).

Exemples 1.

- « $2+2=4$ » est une assertion (vraie) ; « $2=5$ » est une assertion (fausse).
- « $2+!=1-$ », « $1+1$ » et « 7 » ne sont pas des assertions : ces énoncés ne sont ni vrais ni faux en soi.
- « Il pleut » n'est pas une assertion : sa valeur logique varie avec le temps, le lieu, la définition de pleuvoir, etc.

Si on veut donner un nom à une proposition, on écrit « $P : 2+2=4$ ». On dira alors que c'est la proposition P.

En mathématiques, on part d'un petit nombre d'*axiomes*, qui sont des propositions que l'on *suppose* vraies, et on essaie d'étendre le nombre d'énoncés vrais au moyen de démonstrations.

2 Opérateurs logiques

Dans toute cette partie, on note P et Q deux assertions quelconques. Nous allons construire de nouvelles assertions à partir de P et de Q, grâce à des **connecteurs** (ou opérateurs) **logiques** : et, ou, non, $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$.

2.a La négation

La négation de P est une proposition que l'on note non$P$ ou $\neg P$. Pour définir sa valeur logique, on utilise une table de vérité :

P	non$P$
F	V
V	F

Exemple 2. La proposition « $P : 5<2$ », de valeur fausse, a pour négation « non$P : 5 \geq 2$ », de valeur vraie.

2.b La conjonction

La conjonction de P et Q est une proposition que l'on note « P et Q ». Elle est définie par la table de vérité :

P	Q	P et Q
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Il faut que les deux propositions soient vraies pour que la conjonction soit vraie.

Exemples 3.

- « $2+3=5$ et $5<6$ » est vraie, car les deux propositions sont vraies.
- « Rome est en Italie et Toulouse est au Japon » est fausse car la seconde proposition est fausse.

Cette table de vérité permet de définir la valeur logique de « P ou Q » sans ambiguité : à gauche de la double barre, on liste toutes les valeurs possibles du couple (P, Q) : $(F, F), (F, V), (V, F)$ et (V, V). À droite, on donne la valeur logique de « P ou Q » dans chaque cas.

2.c La disjonction

La disjonction de P et Q est une proposition que l'on note « P ou Q ». Elle est définie par la table de vérité :

P	Q	P ou Q
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Il faut qu'au moins une proposition soit vraie pour que la disjonction soit vraie. C'est donc un *ou inclusif.*

Exemples 4.

1) « $2+1=3$ ou $3<0$ » est vraie, car la première proposition est vraie.
2) « Rome est en Suisse ou Toulouse est au Japon » est fausse car les deux propositions sont fausses.

2.d L'implication

On définit « $P \implies Q$ », et on dit « P implique Q », comme la proposition ayant la table de vérité suivante :

P	Q	$P \implies Q$
F	F	**V**
F	V	**V**
V	F	F
V	V	V

Attention ! Comme on peut le voir, si P est fausse, alors $P \implies Q$ est toujours vraie. En fait, $P \implies Q$ signifie exactement « si P est vraie, alors Q est vraie aussi ». S'il s'avère que P est fausse, la proposition $P \implies Q$ n'affirme rien. On considère alors qu'elle est vraie [1].

Le fait que « Faux $\implies Q$ » soit vraie défie notre intuition car « implique », en langue française, laisse croire que partant du Faux on pourrait déduire toute proposition Q (les vraies comme les fausses) par un raisonnement correct. Il faut se détacher du sens du « langage courant » quand on lit $P \implies Q$ et ne retenir que la définition mathématique : si P est vraie, alors Q aussi.

Exemples 5.

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. La proposition « $x \geq 2 \implies 3x \geq 6$ » est vraie.
2) Soit $x \in \mathbb{R}$. La proposition « $x^2 \geq 0 \implies x \geq 0$ » est fausse.
3) La proposition « $1=2 \implies 3=5$ » est vraie car « $1=2$ » est fausse.

Finalement, il serait donc plus exact de traduire $P \implies Q$ par « P est vraie implique Q est vraie ». En fait, c'est un raccourci assez courant en logique : on omet de dire « est vraie », cf la remarque ci-dessous.

Remarque. $P \implies Q$ peut également se lire / dire / écrire par :

1) P (est vraie) entraine Q (est vraie).
2) Si P, alors (nécessairement) Q.
3) Il suffit que P pour avoir Q ; P est une **condition suffisante** pour Q.
4) Il faut (nécessairement) Q pour avoir P ; Q est une **condition nécessaire** pour P.

Exemples 6. Dans chacun des cas, identifier quelle proposition parmi P_1 et P_2 est la condition nécessaire ou la condition suffisante :

- Soit $x \in \mathbb{R}$. $P_1 : x > 2$ et $P_2 : x^2 > 2$.
- Soit T un triangle. $P_1 : (T$ est isocèle) et $P_2 : \big(T$ est équilatéral$\big)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. $P_1 : n$ est pair et $P_2 : 2n$ est pair.

1. Il s'agit d'une convention, on y reviendra dans le chapitre sur les ensembles.

2.E L'équivalence

On définit « $P \iff Q$ » et on dit que P et Q sont *équivalentes*, si P et Q ont la même valeur de vérité :

P	Q	$P \iff Q$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Exemples 7.

1) « $2+1=3 \iff 5<6$ » est vraie (car ... vous avez compris).
2) « $2+1=3 \iff 3<0$ » est fausse (car ... vous avez compris).
3) P et « non(non$P$) » sont équivalentes : pour le démontrer, il suffit de vérifier que ces deux assertions ont la même table de vérité :

P	non$P$	non(non$P$)
F	V	**F**
V	F	**V**

L'assertion $P \iff Q$ est équivalente à l'assertion « $(P \implies Q)$ et $(Q \implies P)$ ». Dit autrement, $P \iff Q$ revient à dire que P implique Q et que Q implique P. Démontrons-le avec les tables de vérité :

P	Q	$P \implies Q$	$Q \implies P$	$(P \implies Q)$ et $(Q \implies P)$	$P \iff Q$
F	F	V	V	**V**	**V**
F	V	V	F	**F**	**F**
V	F	F	V	**F**	**F**
V	V	V	V	**V**	**V**

On a donc montré que

$$(P \iff Q) \iff \big[(P \implies Q) \text{ et } (Q \implies P)\big]$$

Remarque. $P \iff Q$ se lit :

- P **si et seulement si** Q.
- Pour que Q, il faut et il suffit que P.
- P est une condition nécessaire et suffisante pour Q.

2.F Bilan

Proposition 2

Soit P, Q, R trois assertions. On a les équivalences suivantes :

1) non(non$P$) $\iff P$
2) non(P ou Q) $\iff$ (non$P$) et (non$Q$)
3) non(P et Q) $\iff$ (non$P$) ou (non$Q$)
4) P et (Q ou R) $\iff$ (P et Q) ou (P et R)
5) P ou (Q et R) $\iff$ (P ou Q) et (P ou R)
6) non($P \implies Q$) $\iff$ (P et non$Q$)

Démonstration. Comparer les tables de vérité comme on l'a fait ci-dessus. □

Remarquez l'usage des parenthèses ! Il est obligatoire de les mettre pour éviter toute ambiguité. Par exemple « Faux et (Faux ou Vrai) » est faux mais « (Faux et Faux) ou Vrai » est vrai.

3 Quantificateurs

Une proposition peut dépendre de la valeur d'une variable x :

$$P(x) : x^2 - 3 > 0$$

On dit que P est un prédicat. $P(1)$ est fausse, $P(5)$ est vraie.

Définition 3 (*Quantificateurs*)

Soient E un ensemble et P un prédicat dépendant d'une variable de E.

- L'assertion
$$\forall x \in E \quad P(x)$$
est vraie lorsque les assertions $P(x)$ sont vraies pour tous les éléments x de l'ensemble E. On lit « Pour tout x dans E, $P(x)$ », sous-entendu « Pour tout x appartenant à E, $P(x)$ est vraie ».
- L'assertion
$$\exists x \in E \quad P(x)$$
est vraie lorsque l'on peut trouver au moins un x dans l'ensemble E pour lequel $P(x)$ est vraie. On lit « il existe x dans E tel que $P(x)$ ».
- L'assertion
$$\exists! x \in E \quad P(x)$$
est vraie lorsqu'il existe un *unique* x dans E pour lequel $P(x)$ (est vraie).

Exemples 8.

1) « $\forall x \in [1, +\infty[\quad x^2 \geq 1$ » est une assertion vraie.
2) « $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 1$ » est une assertion fausse.
3) « $\forall n \in \mathbb{N} \quad n(n+1)$ est divisible par 2 » est vraie.
4) « $\exists x \in \mathbb{R} \quad x(x-1) < 0$ » est vraie (par exemple $x = \frac{1}{2}$ vérifie bien la propriété).
5) « $\exists n \in \mathbb{N} \quad n^2 - n > n$ » est vraie (par exemple $n = 3$ convient, $n = 10$ aussi... un seul suffit).
6) « $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 = -1$ » est fausse (aucun réel au carré ne donnera un nombre négatif).
7) « $\exists! x \in \mathbb{R} \quad x^2 = 0$ » est vraie, 0 est l'unique réel qui vérifie l'égalité.

On peut remplacer x et n par n'importe quelles lettres : ce sont des variables *muettes*. La lettre x n'est pas réservée aux nombres réels, ni n aux entiers.

Proposition 4 (*Négation des quantificateurs*)

- La négation de « $\forall x \in E \quad P(x)$ » est « $\exists x \in E \quad \text{non}P(x)$ » .
- La négation de « $\exists x \in E \quad P(x)$ » est « $\forall x \in E \quad \text{non}P(x)$ ».

Exemples 9.

1) La négation de « $\forall x \in [1, +\infty[\quad x^2 \geq 1$ » est l'assertion « $\exists x \in [1, +\infty[\quad x^2 < 1$ ». En effet la négation de $x^2 \geq 1$ est $\text{non}(x^2 \geq 1)$ mais s'écrit plus simplement $x^2 < 1$. On remarquera que cette proposition est vraie puisque la proposition initiale était fausse.
2) La négation de « $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 = -1$ » est « $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \neq -1$ ».
3) Ce n'est pas plus difficile d'écrire la négation de phrases complexes. Pour l'assertion
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y > 0 \quad x + y > 10$$
sa négation est
$$\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y > 0 \quad x + y \leq 10$$

REMARQUES.

- **Attention** on ne peut pas *a priori* changer l'ordre des quantificateurs :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x \leq y \text{ est vraie}$$
$$\exists y \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x \leq y \text{ est fausse}$$

  En effet, quand on écrit « $\forall x \quad \exists y$ », le y qui convient *peut dépendre de* x ! Par exemple, dans la première proposition on peut prendre $y = x$.
  Par contre, quand on écrit « $\exists y \quad \forall x$ », on affirme qu'il existe un y qui est *le même pour tous les* x. La seconde proposition est ainsi clairement fausse.

- **Cependant** on peut intervertir deux « $\forall$ » ou deux « $\exists$ » *qui se suivent* :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in F \quad P(x,y) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall y \in F \quad \forall x \in E \quad P(x,y)$$

$$\exists x \in E \quad \exists y \in F \quad P(x,y) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists y \in F \quad \exists x \in E \quad P(x,y)$$

$$\forall x \in E \quad \exists y \in F \quad \forall z \in G \quad P(x,y,z) \quad \not\Longleftrightarrow \quad \forall z \in G \quad \exists y \in F \quad \forall x \in E \quad P(x,y,z)$$

II TYPES DE RAISONNEMENTS

1 DÉMONTRER UNE IMPLICATION

PROPOSITION 5 (*Contraposée*)

Pour toutes propositions P et Q,

$$(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\text{non}Q \Longrightarrow \text{non}P)$$

La proposition $\text{non}P \Longrightarrow \text{non}Q$ est dite la **contraposée** de $P \Longrightarrow Q$.

La contraposée de « s'il pleut, alors il y a des nuages » est « s'il n'y a pas de nuage, alors il ne pleut pas ».

MÉTHODE ($A \Longrightarrow B$)

- Directe : on suppose que A est vraie, et on démontre que B est vraie.
- Contraposée : on suppose que non$B$ est vraie, et on démontre que non$A$ est vraie.

EXEMPLES 10.

1) Montrer l'assertion suivante : $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \geq 1 \Longrightarrow \ln(x) \geq 0$.
2) Montrer l'assertion suivante : $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad xy = 1 \Longrightarrow x \neq 0$.

2 DÉMONTRER UNE ÉQUIVALENCE

MÉTHODE ($A \Longleftrightarrow B$)

- Double implication : on montre $A \Longrightarrow B$, **puis** on démontre la réciproque $B \Longrightarrow A$.
  À chaque fois, on peut utiliser la méthode directe ou la contraposée.
- Par équivalences : on montre $A \Longleftrightarrow A_1$, puis $A_1 \Longleftrightarrow A_2$, (...) jusqu'à $A_n \Longleftrightarrow B$. Il faut faire attention à bien avoir des équivalences à chaque étape, et non de simples implications.

EXEMPLE 11. Montrer l'assertion suivante : $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \text{ pair} \Longleftrightarrow n^2 \text{ pair}$.

Attention : pour l'implication $A \Longrightarrow B$, ne pas confondre l'implication **réciproque** $B \Longrightarrow A$ et la **contraposée** non$B \Longrightarrow$ non$A$.

Méthode (*Équivalence entre plus de 3 propositions*)

Pour démontrer que 3 (ou plus) propositions sont toutes équivalentes, par exemple $A \iff B \iff C$, on peut procéder par implications successives :

- On démontre $A \implies B$.
- On démontre $B \implies C$.
- On démontre $C \implies A$.

Remarque. Si $A \implies B$ et si $B \implies C$, alors $A \implies C$. C'est ce qu'on appelle un syllogisme.

3 Modus ponens

Proposition 6

Soient P et Q deux assertions. Si P et $P \implies Q$ sont vraies, alors Q est vraie.

Exemples 12.

- On veut montrer que la fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $u(x) = x^2$ est continue.
  Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On définit les propositions « $P(f)$: f est dérivable » et « $Q(f)$: f est continue ». On sait que *toute fonction dérivable est continue*, ce qu'on peut reformuler par :

$$\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad P(f) \implies Q(f)$$

  Ainsi, on a $P(u) \implies Q(u)$. Pour montrer $Q(u)$, il suffit donc d'avoir $P(u)$, c'est à dire de montrer que u est dérivable.
  Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrons que u est dérivable en a. Pour tout $h \neq 0$,

$$\frac{u(a+h) - u(a)}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = 2a + h \xrightarrow[h \to 0]{} 2a.$$

  Ainsi, u est dérivable en a avec $u'(a) = 2a$, et ce quel que soit $a \in \mathbb{R}$. u est donc dérivable (sur $\mathbb{R}$). Elle est donc continue (sur $\mathbb{R}$).

4 Raisonnement par l'absurde

Méthode (*Raisonnement par l'absurde*)

Pour montrer que A est vraie, on *suppose* que non A est vraie et on obtient une contradiction. Ainsi, non$A$ est fausse, donc A est vraie.

Il faut particulièrement bien soigner la rédaction de ce type de raisonnement. Le mot « absurde » doit apparaitre.

Exemple 13. On admet que π est irrationnel. Montrer que $2\pi + 3$ est irrationnel.

Remarque. Pour prouver $A \implies B$, on peut donc supposer A vraie et B fausse, et aboutir à une contradiction.

5 Le contre-exemple

Méthode

Pour montrer qu'un prédicat $\forall x \in E \quad P(x)$ est *faux*, on peut exhiber un x dans E pour lequel $P(x)$ est faux. Il suffit d'en trouver un !

Exemple 14. Réfuter la proposition : $\quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \sqrt{x^2} = x.$

6 Disjonction de cas

Méthode

Si $A \implies C$ et $B \implies C$ sont vraies, alors $(A \text{ ou } B) \implies C$ est vraie.

Exemple 15. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \dfrac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

7 Raisonnement par récurrence

Proposition 7 *(Raisonnement par récurrence)*

Soit $P(n)$ un prédicat dépendant d'un entier naturel n. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Si :

- **Initialisation :** $P(n_0)$ est vraie.
- **Hérédité :** pour tout entier $n \geq n_0$, $P(n)$ entraine $P(n+1)$, c'est-à-dire $P(n) \implies P(n+1)$.

Alors pour tout entier $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

Démonstration. Admis pour le moment. □

Exemple 16. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.

Nous allons démontrer le résultat par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) : 2^n > n$.
Initialisation. Pour $n = 0$ nous avons $2^0 = 1 > 0$. Donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$, et montrons $P(n+1)$.

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2^n + 2^n \\ &> n + 2^n \qquad \text{en utilisant } P(n), \\ &\geq n+1 \qquad \text{car } 2^n \geq 1. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où le résultat voulu.

La propriété $P(n)$ (parfois notée P_n ou H_n) est appelée **l'hypothèse de récurrence**.

Méthode

Il faut bien faire apparaitre les 3 étapes : l'initialisation montre que H_{n_0} est vraie. Puis l'étape suivante montre que H_n est *héréditaire*. On en conclut que H_n est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Remarque. Au travers des cours et des exercices nous verrons quelques variantes :

- **Récurrence double :** Si P_0 et P_1 sont vraies et
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (P_n \text{ et } P_{n+1}) \implies P_{n+2}$$
alors P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- **Récurrence forte :** Si P_0 est vraie et
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (P_0, \dots, P_n) \implies P_{n+1}$$
alors P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- **Récurrence descendante :** Si P_N est vraie et
$$\forall n \in [\![1, N]\!] \quad P_n \implies P_{n-1}$$
alors P_n est vraie pour tout $n \in [\![0, N]\!]$

Bien sûr les deux premiers exemples se généralisent à un rang initial $n_0 \in \mathbb{N}$, et même à $n_0 \in \mathbb{Z}$.

Exemple 17. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0, u_1 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = 2 - 2^{n+1}$.

8 ANALYSE–SYNTHÈSE

Ce raisonnement sert à montrer l'existence d'un objet vérifiant une propriété. Il arrive qu'on puisse en outre en déduire son unicité.

MÉTHODE (*Analyse–Synthèse*)

On veut démontrer une propriété du type « $\exists x \in E \quad P(x)$ » ou bien on veut aller plus loin et trouver TOUS les $x \in E$ tels que $P(x)$.

- **Analyse :** on suppose l'existence d'un $x \in E$ tel que $P(x)$, et on en déduit des *conditions nécessaires* que x doit vérifier. Ainsi, on montre $P(x) \implies x \in F$, avec F un sous-ensemble de E à préciser.
- **Synthèse :** l'ensemble F donne une liste de « candidats » possibles pour x. On vérifie alors si l'un d'eux vérifie effectivement $P(x)$.
- **Bonus :** la phase d'analyse permet parfois de conclure que F n'a qu'un seul élément. Dans ce cas, on a l'unicité d'un tel x.

REMARQUES. Encore plus que pour les autres raisonnements, il est très important de préciser dans la rédaction que c'est un raisonnement d'analyse synthèse.

EXEMPLE 18. Résoudre l'équation $x+1=\sqrt{2x+5}$ dans $\mathbb{R}$.

EXEMPLE 19. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction. Montrer qu'il existe un unique couple de fonctions (g,h) définies sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\begin{cases} f = g+h \\ g \text{ est paire} \\ h \text{ est impaire} \end{cases}$$